العادية 2004

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$$

1) أ- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$

ب- استنتج أن f دالة فردية

2) أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم $(\Delta)\ y=-\frac{1}{2}x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$

ج- استنتج أن $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$ لكل x من $\mathbb{R}^+$

4) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

5) أ- بين أن $\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ ($\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$)

ب- حدد مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل والمستقيمين $x=0\ ;\ x=-1$

(II) لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$$U_{n+1}=1-\frac{2}{e^{U_n}+1}\quad \text{و}\quad U_0=1$$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n>0$

2) أ- تحقق أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n$

ب- استنتج أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

3) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(U_n)_n$

العادية 2007

$(I$ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) أحسب $g'(x)$ ثم استنتج أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و أن g تناقصية على $]-\infty,0]$

2) أ- أحسب $g(0)$ و استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)\ge 0$

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad e^{-x}+x\ge 1$

$(II$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D=\mathbb{R}$

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$

ب- أثبت أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ ثم أول هندسيا النتيجتين

3) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=\frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أ- أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $x_0=0$

ب- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ثم أدرس إشارة $x-f(x)$

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta)\ y=x$

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) (نأخذ $\frac{1}{1-e}=-0,6$)

(III) لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$$U_{n+1}=f(U_n)\quad \text{و}\quad U_0=1$$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le U_n\le 1$

2) بين أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

مسألة (1)

الجزء 1 : نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$g(x)=x-1+e^{2x}$$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

ب- أحسب المشتقة $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

2) استنتج إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(0)=0$)

الجزء 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x)=x^2-2x+e^{2x}$

1) أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

2) بين أن $f'(x)=2g(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

3) أدرس تقعر المنحنى (C_f)

4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء 3 : نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1}=U_n^2+e^{2U_n}\quad \text{و}\quad U_0=1$$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le U_n$

2) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_{n+1}\ge 2U_n$

ب- بين أن $(U_n)_n$ تزايدية

3) أ- أثبت أن $U_n\ge 2^n$

ب- هل المتتالية متقاربة ؟ حدد $\lim_{n\to+\infty} U_n$